รากของสมการ (Root of Equation)

การหารากของสมการคือ การหาค่า x ของฟังก์ชันที่อยู่ในรูป f(x) = 0

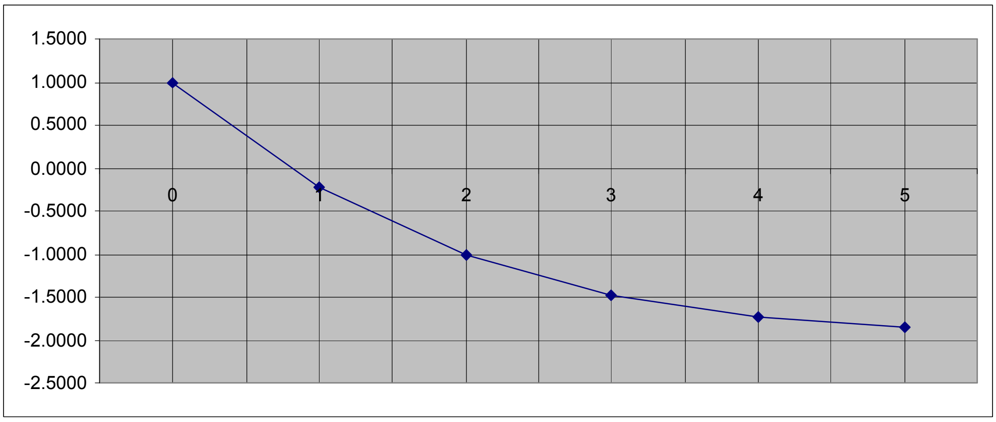
1. ระเบียบวิธีกราฟ (Graphical Method)

วิธีนี้ใช้การทดลองแทนค่า x แล้วพล็อตกราฟหาจุดที่ f(x) มีค่าเท่ากับศูนย์ (หรือใกล้เคียงศูนย์ที่สุด)

ตัวอย่าง หารากของสมการ $f(x) \;=\; e^{-\frac{x}{4}}(2-x)-1 \;=\; 0$

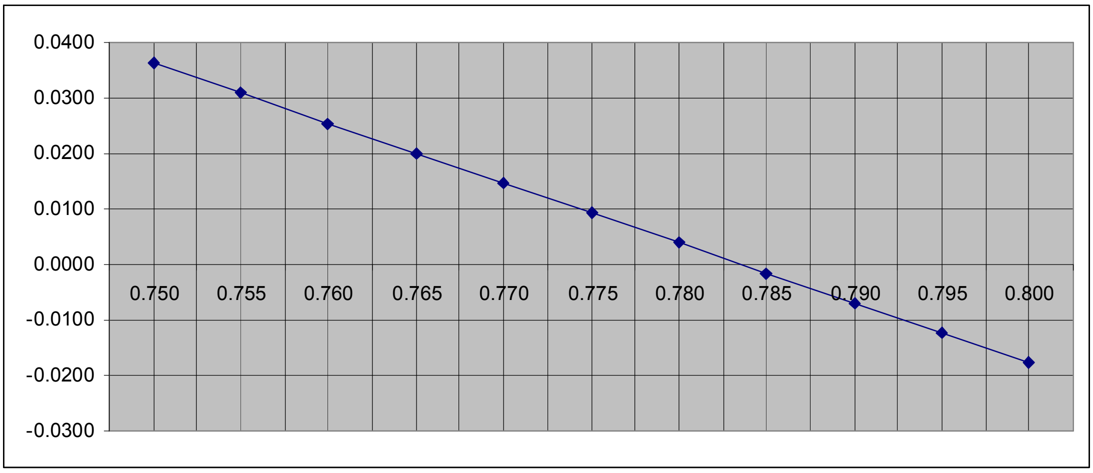
วิธีทำ ทดลองแทนค่า x ตั้งแต่ 0 ถึง 5 แล้วนำไปพล็อตกราฟ

x	f(x)
0	1.0000
1	-0.2212
2	-1.0000
3	-1.4724
4	-1.7358
5	-1.8595



จากกราฟ จะเห็นว่าค่าของ x ที่ทำให้ f(x) = 0 จะอยู่ในช่วง 0.75 ถึง 0.80 ทดลองแทนค่า x ในช่วงระหว่างค่านี้ แล้วนำไปพล็อตกราฟ

x	f(x)
0.750	0.0363
0.755	0.0309
0.760	0.0254
0.765	0.0200
0.770	0.0146
0.775	0.0092
0.780	0.0039
0.785	-0.0015
0.790	-0.0069
0.795	-0.0122
0.800	-0.0175



จะเห็นว่าจะเห็นว่าค่าของ x ที่ทำให้ f(x) = 0 จะอยู่ในช่วง 0.7825 ถึง 0.784 ทดลองแทนค่า x ในช่วงระหว่างค่านี้

x	f(x)
0.7825	0.0012
0.7826	0.0011
0.7827	0.0010
0.7828	0.0009

x	f(x)
0.7829	0.0007
0.7830	0.0006
0.7831	0.0005
0.7832	0.0004
0.7833	0.0003
0.7834	0.0002
0.7835	0.0001
0.7836	0.0000

$\therefore$ รากของสมการ x = 0.7836

2. ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง (Bisection method)

หลักการของระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง คือ การกำหนดขอบเขตของการแทนค่า x น้อยสุด (x_L) และมากสุด (x_R) แล้วบีบช่วงระหว่างสองค่านี้ให้แคบลง ด้วยการหาค่าแบ่งครึ่งช่วง (x_M) ทีละครั้งไปเรื่อยๆ แล้วนำค่า x_M นั้นไปแทนค่าในฟังก์ชันจนกว่าจะได้ค่าศูนย์ ซึ่งโดยทั่วไปแล้วมักจะกำหนดค่าที่ยอมได้เป็นเกณฑ์ในการใช้ค่า x_M นั้น คือไม่ต้องคำนวณค่า x_M จนละเอียดเกินความต้องการ

ขั้นตอนการคำนวณมีดังนี้

1) หาค่าเฉลี่ย x_M จากค่า x_L และ x_R ที่กำหนด

   โดย $x_M = \dfrac{x_L + x_R}{2}$

2) คำนวณค่า $f(x_M)$
3) คำนวณค่า $f(x_R)$
4) คำนวณค่า $f(x_M) \bullet f(x_R)$
5) หาค่าความผิดพลาด

   โดย $\varepsilon = \left|\dfrac{x_M\,new - x_M\,old}{x_M\,new}\right| \times 100\%$

6) ถ้า $\varepsilon <= \varepsilon_S$ (ค่าความผิดพลาดที่ยอมได้) แสดงว่าค่า x_M นั้นคือคำตอบ จบขั้นตอน

   แต่ถ้า $\varepsilon > \varepsilon_S$ ไปขั้นตอนที่ 7

7) ปรับค่า x_L หรือ x_R ใหม่เพื่อบีบช่วงดังกล่าวให้แคบลง โดย
   ถ้าค่าของ $f(x_M) \bullet f(x_R) > 0$ ให้ใช้ x_R ใหม่เท่ากับ x_M , x_L ใช้ค่าเดิม
   ถ้าค่าของ $f(x_M) \bullet f(x_R) < 0$ ให้ใช้ x_L ใหม่เท่ากับ x_M , x_R ใช้ค่าเดิม
8) กลับไปขั้นตอนที่ 1

ตัวอย่าง หารากของสมการ $f(x) = e^{-\frac{x}{4}}(2-x)-1 = 0$ กำหนดให้ค่าเริ่มต้น $x_L = 0$ และ $x_R = 2$ โดยใช้ค่าความผิดพลาดที่ยอมได้ (ε_s) เท่ากับ 0.001%

วิธีทำ

No.	x_L	x_R	x_M	$f(x_M)$	$f(x_R)$	$f(x_M) \bullet f(x_R)$	ε
0	0.0000	2.0000	**1.0000**	**-0.221199**	**-1.000000**	**0.221199**	**–**
1	0.0000	1.0000	**0.5000**	**0.323745**	**-0.221199**	**-0.071612**	**100.000**
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							

3. ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสัน (Newton-Raphson Method)

จากอนุกรมเทย์เลอร์อันดับแรก : $f(x_{i+1}) \cong f(x_i)+f'(x_i)(x_{i+1}-x_i)$

พิจารณา $f(x_{i+1}) = 0$

ดังนั้น $f(x_i) + f'(x_i)(x_{i+1}-x_i) = 0$

$$\therefore \quad x_{i+1}-x_i = -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$$\boxed{\Delta_x = x_{i+1}-x_i = -\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}} \qquad (1)$$

ขั้นตอนการคำนวณมีดังนี้

1) หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน, $f'(x)$ จากฟังก์ชันที่โจทย์กำหนด

2) หาค่า $f(x_i)$ และ $f'(x_i)$ โดย x_i คือ ค่า x ที่ลำดับ i (เริ่มต้นลำดับที่ i เท่ากับ 0 ซึ่งค่า x คือค่าที่โจทย์กำหนด)

3) หาค่า Δ_x จากสมการ (1)

4) หาค่า x ที่ลำดับ i ใหม่ จาก $x_{i+1} = x_i + \Delta_x$

5) หาค่าความผิดพลาด

   โดย $\varepsilon = \left|\frac{\Delta_x}{x_{i+1}}\right|$ x100%

6) ถ้า $\varepsilon <= \varepsilon_S$ (ค่าความผิดพลาดที่ยอมได้) แสดงว่าค่า x_{i+1} นั้นคือคำตอบ จบขั้นตอน
   แต่ถ้า $\varepsilon > \varepsilon_S$ ให้ค่า x_{i+1} เป็นค่า x_i ของลำดับที่ i ใหม่ แล้วกลับไปขั้นตอนที่ 2

ตัวอย่าง หารากของสมการ $f(x) = e^{-\frac{x}{4}}(2-x)-1 = 0$ กำหนดให้ค่าเริ่มต้น = 3 และใช้ค่าความผิดพลาดที่ยอมได้ (ε_s) เท่ากับ 0.001%

วิธีทำ

$$f'(x) = e^{-\frac{x}{4}}(-1) + (2-x)e^{-\frac{x}{4}}\left(-\frac{1}{4}\right)-0$$

$$= e^{-\frac{x}{4}}\left(-\frac{3}{2}+\frac{x}{4}\right)$$

i	x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	Δ_x	x_{i+1}	ε
0	3.0000	-1.4724	-0.3543	-4.1560	**-1.1560**	359.516
1	-1.1560					
2						
3						
4						
5						

หมายเหตุ :

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$$

<u>แบบฝึกหัด</u>

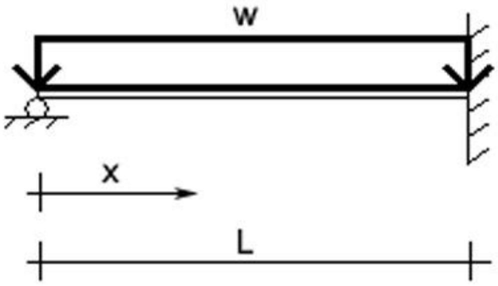
1) จงหารากของสมการ $f(x) = 14.1199x - 2.875x^2 = 0$ โดย

ก) หาผลเฉลยแม่นตรง

ข) ใช้ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง

ค) ใช้ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสัน

2) คานรับน้ำหนักบรรทุกดังรูป สามารถหาค่าโมเมนต์ดัดที่ระยะ x ใดๆ (วัดจากปลายคานด้านซ้าย) ได้จากสมการ $M_x = \frac{3wLx}{8} - \frac{wx^2}{2}$



ถ้า w = 5000 kg/m และ L = 10 m จงหาระยะ x (วัดจากปลายคานด้านซ้าย) ที่ค่าโมเมนต์ดัดเท่ากับศูนย์ โดย

ก) หาผลเฉลยแม่นตรง

ข) ใช้ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง

ค) ใช้ระเบียบวิธีของนิวตัน-ราฟสัน