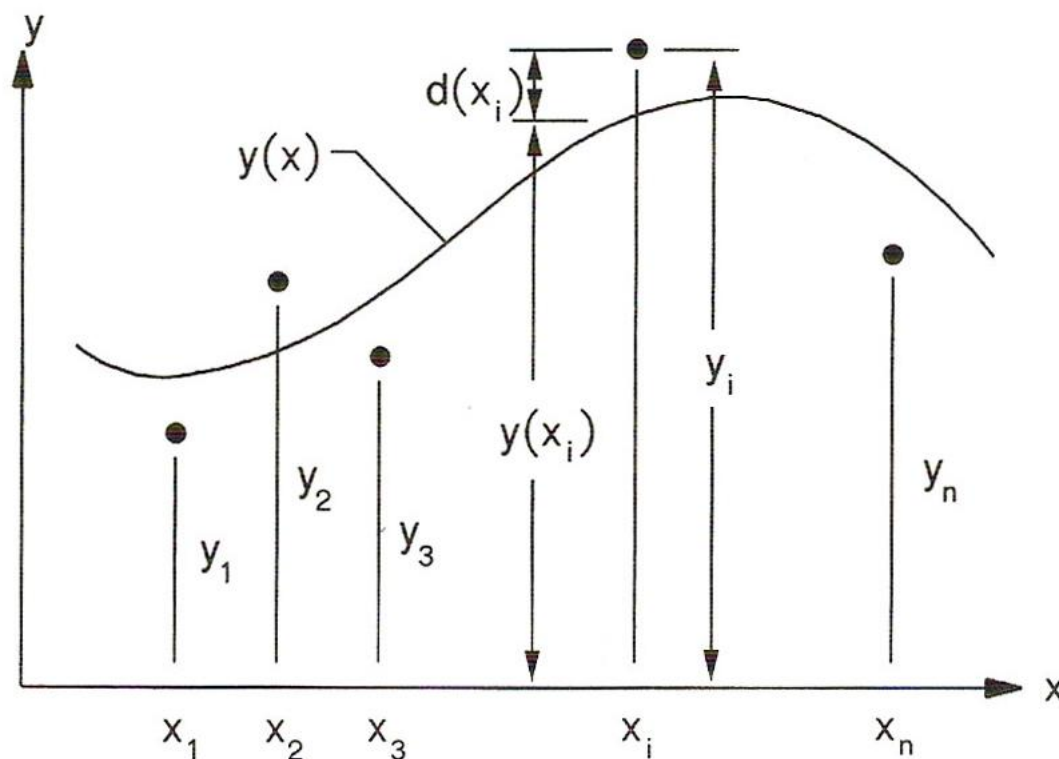


การถดถอยแบบพหุนาม (polynomial regression)

เป็นระเบียบวิธีที่ใช้สร้างฟังก์ชันพหุนามสำหรับข้อมูลที่มีการกระจายโดยทั่วไปที่ไม่อยู่ในรูปแบบของเชิงเส้น พิจารณากราฟจากภาพ



ชุดข้อมูลจากภาพประกอบด้วย x_i, y_i โดยที่ $i = 1, 2, \dots, n$ คือมีจำนวน n ข้อมูล ซึ่งเมื่อเราต้องการสร้างสมการพหุนามอันดับ m สำหรับข้อมูลชุดนี้ จะได้ว่า

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m \quad (1)$$

โดยที่ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ เป็นค่าคงที่ ที่คำนวณหาจากเงื่อนไขที่ว่า สมการพหุนามที่สร้างขึ้นมานี้ จะทำให้เกิดค่าความผิดพลาดโดยเฉลี่ยที่น้อยที่สุดจากข้อมูลทั้งหมดที่กำหนดมาให้นั้นคือ

$$E = \sum d(x_i)^2 \quad (2)$$

หรือเท่ากับ

$$E = \sum [y_i - y(x_i)]^2 \quad (3)$$

แทนค่า $y(x_i)$ จากสมการ (1) ในสมการ (3) จะได้

$$E = \sum [y_i - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_mx^m)]^2 \quad (4)$$

จากนั้น โดยการใช้วิธีกำลังสองน้อยสุด ซึ่งทำจากวิธีการหาค่าต่ำสุด (minimization) ของค่าความผิดพลาด E ในแต่ละค่าคงที่ ทำให้ได้ระบบสมการที่ประกอบด้วย $m+1$ สมการย่อย ซึ่งเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} n & \sum x & \sum x^2 & \dots & \sum x^m \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 & \dots & \sum x^{m+1} \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 & \dots & \sum x^{m+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum x^m & \sum x^{m+1} & \sum x^{m+2} & \dots & \sum x^{2m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y \\ \sum xy \\ \sum x^2 y \\ \vdots \\ \sum x^m y \end{bmatrix} \quad (5)$$

เมื่อกำหนดค่าคงที่ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ ได้จากสมการที่ (5) แล้ว ก็นำค่าคงที่นี้ไปแทนลงในสมการ (1) ก็จะได้สมการถดถอยแบบพหุนามอันดับ m ตามที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 1 จงคำนวณหาสมการพหุนามอันดับสอง สำหรับข้อมูลต่อไปนี้

x	0	1	3	4	6	8	9	10	11	12
y	1	-7	-17	-19	-17	-7	1	11	23	37

วิธีทำ

สมการพหุนามอันดับสองคือ $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$

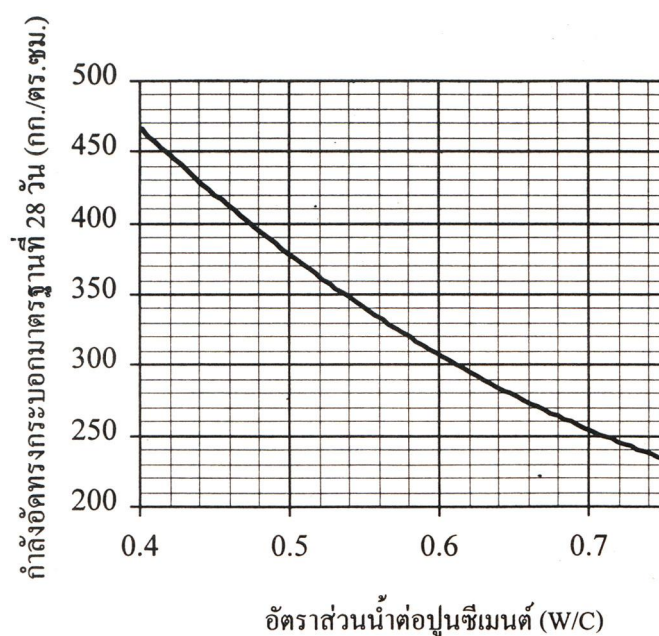
หาค่า a_0 , a_1 และ a_2

No.	x	x^2	x^3	x^4	y	$x \cdot y$	$x^2 \cdot y$
1	0				1		
2	1				-7		
3	3				-17		
4	4				-19		
5	6				-17		
6	8				-7		
7	9				1		
8	10				11		
9	11				23		
10	12				37		
Σ							

$$\left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right] \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \left\{ \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right\}$$

ตัวอย่างที่ 2 จากกราฟความสัมพันธ์ของอัตราส่วนน้ำต่อปูนซีเมนต์และกำลังอัดทรงกระบอกมาตรฐาน (f_{cu}) ที่ 28 วัน ดังรูป

จงสร้างสมการพหุนามอันดับสามให้อยู่ในรูปแบบ $W/C = a_0 + a_1 f_{cu} + a_2 f_{cu}^2 + a_3 f_{cu}^3$



วิธีทำ

$$x = f_{cu}, y = W/C$$

No.	x (f_{cu})	y (W/C)	No.	x (f_{cu})	y (W/C)
1		0.40	10		0.58
2		0.42	11		0.60
3		0.44	12		0.62
4		0.46	13		0.64
5		0.48	14		0.66
6		0.50	15		0.68
7		0.52	16		0.70
8		0.54	17		0.72
9		0.56	18		0.74

x	x ²	x ³	x ⁴	x ⁵	x ⁶	y	x•y	x ² •y	x ³ •y
						0.40			
						0.42			
						0.44			
						0.46			
						0.48			
						0.50			
						0.52			
						0.54			
						0.56			
						0.58			
						0.60			
						0.62			
						0.64			
						0.66			
						0.68			
						0.70			
						0.72			
Σ						0.74			

$$\left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \right]$$

$$[\text{คำตอบ W/C} = 1.37413\text{E}+00 - 3.31967\text{E}-03 f_{cu} + 2.65818\text{E}-06 f_{cu}^2 + -1.12257\text{E}-13 f_{cu}^3]$$