ระเบียบวิธีการแยกแบบโชเลซกี

(Cholesky decomposition methed)

ใช้สำหรับแก้ระบบสมการ [A]{X} = {B} โดย [A] เป็นเมตริกซ์ที่มีความสมมาตรในแนวทแยง

หลักการคือ แยก [A] ออกเป็น $[L][L]^T$ โดย [L] คือเมตริกซ์ที่มีค่าสัมประสิทธิ์ด้านบนขวาเหนือแนวทแยงเป็นศูนย์

จาก	[A]{X}	=	{B}	
จะได้ว่า	$[L]\,[L]^T\{X\}$	=	{B}	………………………………………….. (1)
ให้	$[L]^T\{X\}$	=	{Y}	………………………………………….. (2)

แทนใน {Y} จาก (2) ใน (1)

	[L] {Y}	=	{B}	………………………………………….. (3)

จาก (3) เราสามารถหา {Y} ได้โดยการแทนค่าแบบไปข้างหน้า (forward substitution) และเมื่อนำ {Y} แทนค่าลงใน (2) เราก็จะหาคำตอบของระบบสมการคือ {X} ได้โดยการแทนค่าแบบย้อนกลับ (backward substitution)

ตัวอย่างเช่น มีระบบสมการ [A]{X} = {B} จำนวน 3 ตัวแปร ดังนี้ (โดย [A] สมมาตรในแนวทแยง)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

แยก [A] ออกเป็น $[L][L]^T$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

ดังนั้น

$$a_{11} = (l_{11} \bullet l_{11}) + (0 \bullet 0) + (0 \bullet 0) = l^2_{11}$$

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

$$a_{12} = (l_{11} \bullet l_{21}) + (0 \bullet l_{22}) + (0 \bullet 0) = l_{11}\, l_{21}$$

$$l_{21} = \frac{a_{12}}{l_{11}}$$

$$a_{13} = (l_{11} \bullet l_{31}) + (0 \bullet l_{32}) + (0 \bullet l_{33}) = l_{11}\, l_{31}$$

$$l_{31} = \frac{a_{13}}{l_{11}}$$

$$a_{22} = (l_{21} \bullet l_{21}) + (l_{22} \bullet l_{22}) + (0 \bullet 0) = l^2_{21} + l^2_{22}$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2}$$

$$a_{23} = (l_{21} \bullet l_{31}) + (l_{22} \bullet l_{32}) + (0 \bullet l_{33}) = l_{21}\, l_{31} + l_{22}\, l_{32}$$

$$l_{32} = \frac{a_{23} - l_{21} l_{31}}{l_{22}}$$

$$a_{33} = (l_{31} \bullet l_{31}) + (l_{32} \bullet l_{32}) + (l_{33} \bullet l_{33}) = l^2_{31} + l^2_{32} + l^2_{33}$$

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2}$$

จาก (1)

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

แทนค่า l_{11} , l_{21} , l_{31} , l_{22} , l_{32} และ l_{33} ลงไปในสมการนี้ แล้วหา {Y} จาก (3)

$$\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น

$$y_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

$$y_2 = \frac{b_2 - l_{21}\, y_1}{l_{22}}$$

$$y_3 = \frac{b_3 - l_{31}\, y_1 - l_{32}\, y_2}{l_{33}}$$

แทนค่า {Y} ลงใน (2)

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix}$$

เพราะฉะนั้น

$$x_3 = \frac{y_3}{l_{33}}$$

$$x_2 = \frac{y_2 - l_{32}\, x_3}{l_{22}}$$

$$x_1 = \frac{y_1 - l_{31}\, x_3 - l_{21}\, x_2}{l_{11}}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้ โดยใช้ระเบียบวิธีการแยกแบบโชเลซกี

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3125 \\ 3650 \\ 2800 \end{Bmatrix}$$

วิธีทำ

[A]			{X}		{B}
4	3	1	x_1		3125
3	5	2	x_2	=	3650
1	2	6	x_3		2800

[A]				[L]			$[L]^T$		
4	3	1							
3	5	2	=						
1	2	6							

[L]			{Y}		{B}
			y_1		3125
			y_2	=	3650
			y_3		2800

$\therefore \quad y_1 =$

$y_2 =$

$y_3 =$

$[L]^T$			{X}		{Y}
			x_1		
			x_2	=	
			x_3		

$\therefore \quad x_3 =$ #

$x_2 =$ #

$x_1 =$ #

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้ โดยใช้ระเบียบวิธีการแยกแบบโชเลซกี

$$\begin{bmatrix} 2195.18 & 553.09 & 696.00 \\ 553.09 & 437.65 & 884.50 \\ 696.00 & 884.50 & 522000.00 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -30 \\ -1200 \end{Bmatrix}$$

วิธีทำ

[A]			{X}		{B}
				=	

[A]				[L]			[L]^T		
			=						

[L]			{Y}		{B}
				=	

∴ y_1 =

y_2 =

y_3 =

[L]^T			{X}		{Y}
			x_1		
			x_2	=	
			x_3		

∴ x_3 = #

x_2 = #

x_1 = #

สำหรับรูปทั่วไปของการหา [L] จาก [A] จำนวน n สมการย่อยคือ

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}}$$

แนวนอน k ถัดไป โดย k = 2, 3, …, n

$$l_{ki} = \frac{a_{ki} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} l_{kj}}{l_{ii}} \qquad \text{เมื่อ } i = 1, 2, \ldots, k\text{-}1$$

$$l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{kj}^2}$$

<u>แบบฝึกหัด</u>

จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้ ระเบียบวิธีการแยกแบบโชเลซกี

1) $$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 11/6 \\ 13/12 \\ 47/60 \end{Bmatrix}$$

2) $$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

3) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.234 \\ 2.234 \\ 3.334 \\ 4.444 \end{Bmatrix}$$

4) $$\begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{Bmatrix}$$