

บทที่ 6

การเปลี่ยนรูป : วิธีงานเสมือน

6.1 ความนำ

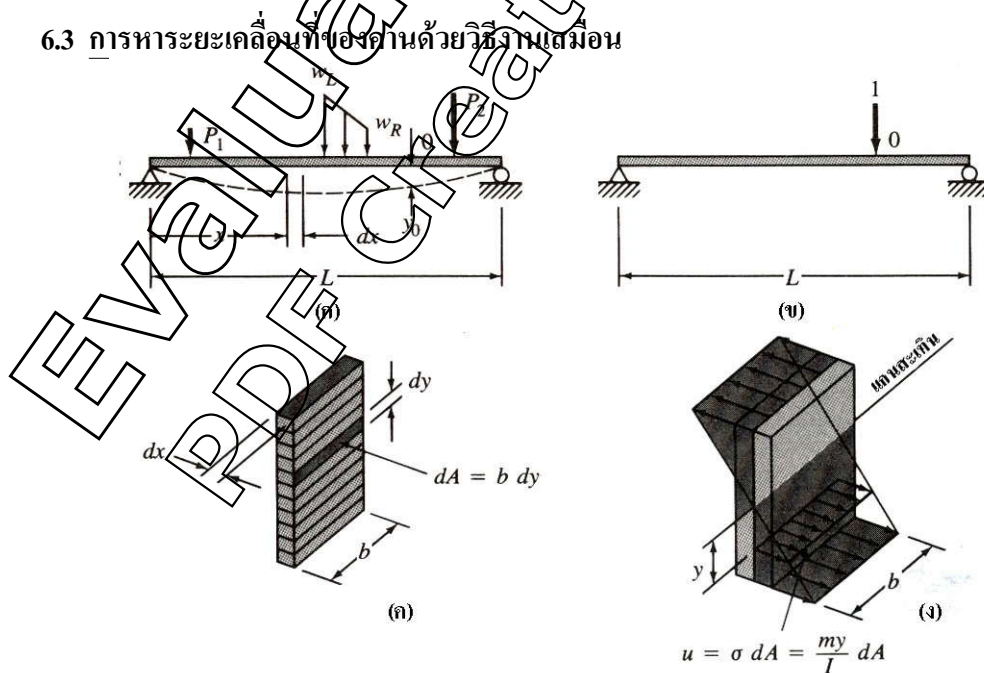
ในปี ค.ศ. 1717 จอห์น เบร์นูลลี (John Bernoulli) ได้ทำการศึกษาพัฒนา “วิธีงานเสมือน (method of virtual work)” ขึ้นมาเพื่อใช้คำนวณการเปลี่ยนรูปของโครงข้อหมุน คาน และโครงข้อแข็ง ซึ่งจัดเป็นวิธีที่ใช้ได้อย่างทั่วไป แนวคิดของวิธีงานเสมือนมีพื้นฐานมาจากกฎของการอนุรักษ์พลังงาน ซึ่งเป็นการพิจารณางานที่เกิดขึ้นเนื่องจากระบบจลนภาพของแรงในโครงสร้างสมดุล งานเนื่องจากแรงจินตภาพ เรียกว่า “งานเสมือน” และแรงจินตภาพเรียกว่า “แรงเสมือน” ในตำราเล่มนี้จะอธิบายถึงการเปลี่ยนรูปในคานเท่านั้น

6.2 กฎของงานเสมือนของเบอร์นูลลี

“พิจารณางานภายนอกซึ่งเกิดจากแรงเสมือนหนึ่งหน่วยกระทำที่โครงสร้างในสภาพสมดุลซึ่งเคลื่อนไปเนื่องจากการเปลี่ยนรูปด้วยระบบน้ำหนักบรรทุกจริง จากกฎของการอนุรักษ์พลังงาน งานภายนอกนี้จะเท่ากับพลังงานเครือข่ายใน ซึ่งเกิดจากแรงเสมือนภายในกับการเปลี่ยนรูปจริง”

วิธีงานเสมือนนี้มีชื่อเรียกอีกว่า วิธีน้ำหนักบรรทุกหนึ่งหน่วย (unit-load method)

6.3 การหาระยะเคลื่อนที่ของคานด้วยวิธีงานเสมือน



รูปที่ 6.1 พฤติกรรมของคานเมื่อรับน้ำหนักบรรทุก

คานรับน้ำหนักบรรทุกดังรูปที่ 6.1 (ก) ต้องการทราบค่า y_0 ที่จุด O โดยสมมุติคานนี้มีหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า จากวิธีงานเสมือน ให้ใส่น้ำหนักบรรทุกเสมือน หน่วยที่จุด O ดังรูปที่ 6.1 (ข)

$$\therefore \text{งานเสมือนภายนอก } W_e = 1 \cdot y_0 \quad (6.1)$$

สมมุติว่าแรงตามแนวแกน แรงเฉือน และแรงบิดที่เกิดขึ้นภายในคานมีค่าน้อยมาก จึงไม่นำมาคิด จะพิจารณาเฉพาะแรงคัดเท่านั้น

พิจารณารูปที่ 6.1 (ค) คานความยาว dx ใดๆ วัดจากปลายด้านซ้ายเป็นระยะทาง x และ $dA = b \cdot dy$

ให้ m เท่ากับโมเมนต์คัดที่ระยะ x ใดๆ เนื่องจากน้ำหนักบรรทุกเสมือน 1 หน่วยกระทำที่จุด O ดังนั้นแรงคัดเนื่องจาก m ในแต่ละแถบย่อยของหน้าตัดคาน (ข) ดังรูปที่ 6.1 (ง) จะได้ว่า

$$u = \sigma \cdot dA = \frac{my}{I} dA$$

ให้ M เท่ากับโมเมนต์คัดที่ระยะ x ใดๆ เนื่องจากน้ำหนักบรรทุกจริง ดังนั้น การเปลี่ยนรูปตามแนวยาวเนื่องจาก M ในแต่ละแถบย่อยของหน้าตัดคาน จะได้ว่า

$$\delta = \varepsilon \cdot dx = \left(\frac{\sigma}{E} \right) dx = \left(\frac{My}{EI} \right) dx$$

งานเสมือนภายใน ในแต่ละแถบย่อยของหน้าตัดคานคือ

$$\delta W_i = u \delta = \left(\frac{my}{I} dA \right) \left(\frac{My}{EI} dx \right)$$

งานเสมือนภายในของแถบหน้าตัดคานทั้งหมด หาได้จากการอินทิเกรต คือ

$$\int \frac{Mmy^2 dA}{EI^2} dx = \frac{Mm}{EI^2} \int y^2 dA \cdot dx$$

เพราะว่า $I = \int y^2 dA$ ทอมทางขวาของสมการด้านบนเท่ากับ $\frac{Mm}{EI} dx$

เพราะฉะนั้น งานเสมือนภายในทั้งหมดของคานช่วงความยาวจาก 0 ถึง L คือ

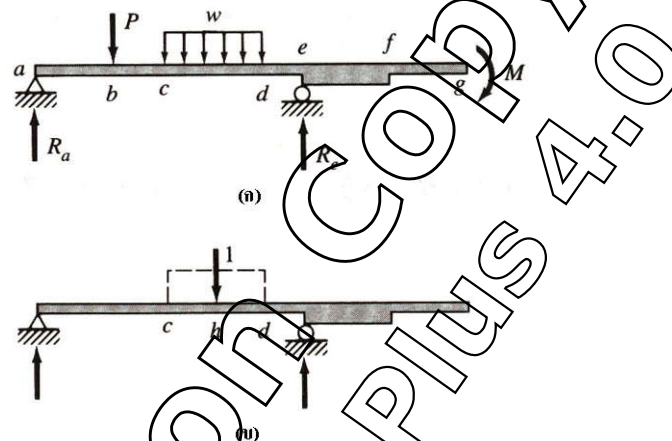
$$W_i = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx \quad (6.2)$$

จากกฎของการอนุรักษ์พลังงาน $W_e = W_i$

$$\therefore I \cdot y_0 = \int_0^L \frac{Mm}{EI} dx \quad (6.3)$$

หมายเหตุ

1. ขอบเขตของการอินทิเกรตจะต้องเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง นั่นคือ เมื่อค่า M , m , E หรือ I เกิดความไม่ต่อเนื่อง จะต้องกำหนดขอบเขตของการอินทิเกรตเป็นช่วงไป แล้วจึงรวมค่าเข้าด้วยกัน พิจารณารูปที่ 6.2 ตัวอย่างการรับน้ำหนักบรรทุกรูปแบบต่างๆ และคานามีค่าไม่คงที่



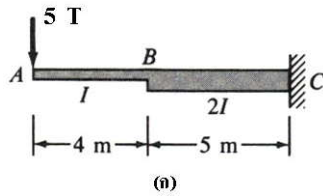
รูปที่ 6.2 การพิจารณาขอบเขตของการอินทิเกรต

เมื่อต้องการทราบค่า y_h นั่นคือ ใต้น้ำหนักบรรทุกเสมือน 1 หน่วยที่จุด h ดังรูปที่ 6.2 (ข) การแบ่งช่วงขอบเขตของการอินทิเกรตจะต้องแบ่งเป็น a ถึง b , b ถึง c , c ถึง h , h ถึง d , d ถึง e , e ถึง f และ f ถึง g

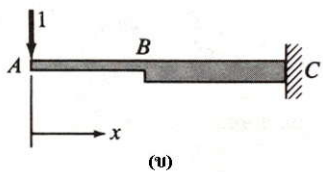
2. ถ้าผลลัพธ์ของการอินทิเกรตเป็นบวก แสดงว่าทิศทางของระยะแอนเป็นทิศทางเดียวกับน้ำหนักบรรทุกเสมือน 1 หน่วย

3. น้ำหนักของคานาถือว่าน้อยมาก เมื่อเทียบกับน้ำหนักบรรทุกที่มากกระทำ จึงไม่นำมาพิจารณา

ตัวอย่างที่ 6.1 จงคำนวณหาระยะแอ่นที่จุด A ของคานรับน้ำหนักบรรทุกค้ำรูป ในเทอมของ EI



วิธีทำ ใส่คานรับน้ำหนักบรรทุก 1 หน่วยที่จุด A ดังรูป (ข)



หาสมการ M จากรูป (ก) และสมการ m จากรูป (ข) จะได้ว่า

จาก A ถึง C (0 m ถึง 9 m)

$$M = -5x \quad \text{และ} \quad m = -1x$$

แต่เนื่องจาก I มีค่าไม่ต่อเนื่องตลอดช่วงคาน ดังนั้น ต้องแบ่งช่วงการอินทิเกรตเป็น จาก A ถึง B และ จาก B ถึง C ดังนั้น จากสมการที่ (6.3)

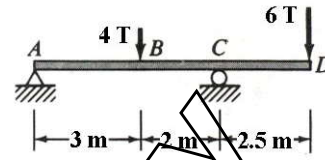
$$\begin{aligned} 1 \cdot \delta_A &= \int_{x=0}^{x=4} \frac{Mm}{EI} dx + \int_{x=4}^{x=9} \frac{Mm}{E(2I)} dx \\ &= \int_0^4 \frac{(-5x)(-1x)}{EI} dx + \int_4^9 \frac{(-5x)(-1x)}{2EI} dx \\ &= \frac{5x^3}{3EI} \Big|_0^4 + \frac{5x^2}{6EI} \Big|_4^9 \\ &= \frac{5}{6EI} [2(4)^3 + (9^2 - 4^2)] \\ &= \frac{660.83}{EI} \downarrow \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 6.2 จงคำนวณหาระยะแอ่นที่จุด B ของคานรับน้ำหนักบรรทุกทุกดังรูป
กำหนด $EI = 1.6 \times 10^8 \text{ T-cm}^2$

วิธีทำ

ใส่คานน้ำหนักบรรทุกทุกเสมือน 1 หน่วยที่จุด B



หาสมการ M และสมการ m

จาก A ถึง B (0 m ถึง 3 m)

$$M = -1.4x, \quad m = +0.4x$$

$$Mm = -0.56x^2$$

จาก B ถึง C (3 m ถึง 5 m)

$$M = -1.4x - 4(x-3) = -5.4x + 12, \quad m = +0.4x - 1(x-3) = -0.6x + 3$$

$$Mm = (-5.4x + 12)(-0.6x + 3)$$

$$= 3.24x^2 - 16.2x - 7.2x + 36$$

$$= 3.24x^2 - 23.4x + 36$$

จาก D ถึง C (0 m ถึง 2.5 m)

$$M = -6x, \quad m = 0, \quad Mm = 0$$

ดังนั้น

$$\delta_B = \int_0^3 (-0.56x^2) \frac{dx}{EI} + \int_3^5 (3.24x^2 - 23.4x + 36) \frac{dx}{EI}$$

$$= -\frac{0.56x^3}{3EI} \Big|_0^3 + \frac{1}{EI} \left(\frac{3.24x^3}{3} - \frac{23.4x^2}{2} + 36x \right) \Big|_3^5$$

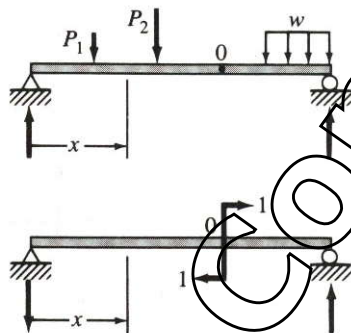
$$\delta_B = -\frac{5.04}{EI} + \frac{1}{EI} (105.84 - 187.2 + 72) = -\frac{14.4}{EI}$$

$$= 0.09 \text{ cm } \uparrow$$

ตอบ

6.4 การหาค่ามุมลาดของคานด้วยวิธีงานเสมือน

เราสามารถใช่วิธีงานเสมือนคำนวณหาค่ามุมลาดที่ตำแหน่งใดๆ ในคาน โดยการใส่โมเมนต์คู่ควบเสมือน (virtual couple) 1 หน่วย ณ ตำแหน่งนั้น แทนการใส่น้ำหนักบรรทุกเสมือน พิจารณารูปที่ 6.3



รูปที่ 6.3 การหาค่ามุมลาดของคานด้วยวิธีงานเสมือน

ให้ m' เท่ากับ โมเมนต์ดัดที่ตำแหน่ง x ใดๆ บนคานเนื่องจากโมเมนต์คู่ควบเสมือน 1 หน่วย กระทำที่จุด O (จุดที่ต้องการทราบค่า) ดังนั้น

$$\text{งานเสมือนภายนอก } W_e = 1 \cdot \theta_0$$

$$\text{งานเสมือนภายใน } W_i = \int_0^L \frac{Mm'}{EI} dx$$

เพราะว่า $W_e = W_i$

$$\text{เพราะฉะนั้น } 1 \cdot \theta_0 = \int_0^L \frac{Mm'}{EI} dx \quad (6.4)$$

ตัวอย่างที่ 6.3 จงหาค่ามุมลาดที่ปลายอิสระของคานรับน้ำหนักบรรทุกทุกตั้งรูป

กำหนด $E = 2 \times 10^6$ ksc และ $I = 60\,000$ cm⁴

วิธีทำ

ใส่โมเมนต์คู่ควบเสมือน 1 หน่วยที่ปลายอิสระ

$$M = -x^2, \quad m' = +1$$

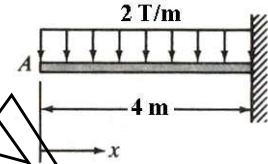
$$Mm' = -x^2$$

จากสมการ (6.4)

$$\begin{aligned} 1 \cdot \theta_A &= \int_0^L \frac{Mm'}{EI} dx = \int_0^4 \frac{-x^2}{EI} dx = -\frac{x^3}{3EI} \Big|_0^4 \\ &= -\frac{64}{3EI} = -\frac{64(1000)(100)^2}{3(2 \times 10^6)(60\,000)} = -1.78 \times 10^{-3} \end{aligned}$$

$$\therefore \theta_A = 1.78 \times 10^{-3} \text{ rad } \curvearrowright$$

ตอบ

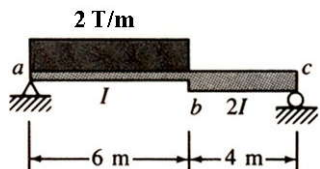


Evaluation Copy 4.0
PDF Creator Plus

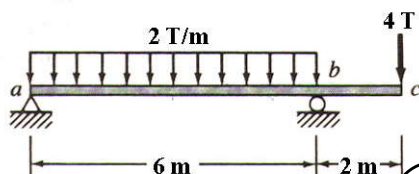
แบบฝึกหัด

คานรับน้ำหนักบรรทุกดังรูป

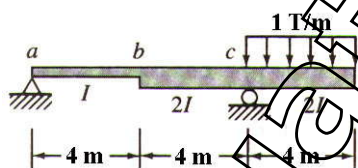
1. จงคำนวณหา θ_a และ δ_b กำหนด $E = 2 \times 10^6$ ksc และ $I = 80\,000$ cm⁴



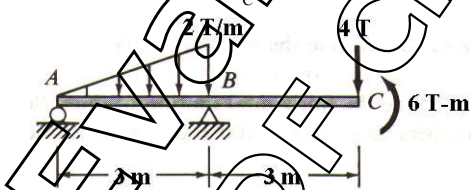
2. จงคำนวณหา δ_c กำหนด $E = 2 \times 10^6$ ksc และ $I = 100\,000$ cm⁴



3. จงคำนวณหา δ_b กำหนด $E = 2 \times 10^6$ ksc และ $I = 60\,000$ cm⁴



4. จงคำนวณหา δ_c กำหนด $E = 2 \times 10^6$ ksc และ $I = 150\,000$ cm⁴



5. จงคำนวณหา θ_d และ δ_b กำหนด $E = 2 \times 10^5$ ksc และ $I = 540\,000$ cm⁴

